

Analytical solution of second Stokes problem about behaviour of gas over fluctuating surface by means of ellipsoidal statistical equation

A. V. Latyshev¹ and A. A. Yushkanov²

*Faculty of Physics and Mathematics,
Moscow State Regional University, 105005,
Moscow, Radio str., 10-A*

Содержание

1	Постановка задачи	4
2	Собственные решения непрерывного спектра	6
3	Структура дискретного спектра	8
4	Аналитическое решение граничной задачи	13
5	Функция распределения	18
6	Скорость газа в полупространстве и непосредственно у стенки	19
7	Гидродинамический характер решения	21
8	Сила трения, действующая на колеблющуюся грани- цу	21
9	Заключение	22

¹avlatyshev@mail.ru

²yushkanov@inbox.ru

Second Stokes problem about behaviour of rarefied gas filling half-space is analytically solved. A plane limiting half-space makes harmonious fluctuations in the plane. The kinetic equation with modelling integral collisions in form of ellipsoidal statistical model is used. The case of diffusion reflexions of gas molecules from a wall is considered. Function distribution of gas molecules is constructed and mass velocity of gas also in half-space is found. Hydrodynamic character of the solution at small frequencies of fluctuation plane limiting gas is revealed. The force of a friction operating from gas on border making in the plane oscillatory movement is found.

Keywords: statement of Stokes problem, separation of variables, eigen solutions, continuous and discrete spectrum, exact solution.

Аналитически решена вторая задача Стокса о поведении разреженного газа, заполняющего полупространство. Плоскость, ограничивающая полупространство, совершает гармонические колебания в своей плоскости. Используется кинетическое уравнение с модельным интегралом столкновений в форме эллипсоидально-статистической модели. Рассматривается случай диффузного отражения молекул газа от стенки. Построена функция распределения газовых молекул и найдена массовая скорость газа в полупространстве. Выявлен гидродинамический характер решения при малых частотах колебания ограничивающей газ плоскости. Найдена сила трения, действующая со стороны газа на границу, совершающую в своей плоскости колебательное движение.

Ключевые слова: постановка задачи Стокса, разделение переменных, собственные решения, непрерывный и дискретный спектр, точное решение.

Введение

Задача о поведении газа над движущейся поверхностью в последние годы привлекает пристальное внимание [1]–[13]. Это связано с развитием современных технологий, в частности, технологий наноразмеров. В [1]–[13] эта задача решалась численными или приближенными методами.

Впервые задача о поведении сплошной среды над стенкой, колеблющейся в своей плоскости, была рассмотрена Дж. Г. Стоксом [15]. Сейчас такую задачу называют второй задачей Стокса [1]–[4].

В последние годы на тему этой задачи появился ряд публикаций. В работе [5] получены коэффициенты вязкостного и теплового скольжения с использованием различных модельных уравнений.

Использованы как максвелловские граничные условия, так и граничные условия Черчиньяни—Лэмпис.

В статье [6] рассматривается газовый поток над бесконечной пластиной, совершающей гармонические колебания в собственной плоскости. Найдена скорость газа над поверхностью и сила, действующая на поверхность со стороны газа. Для случая низких частот задача решена на основе уравнения Навье—Стокса. Для произвольных скоростей колебаний поверхности задача решена численными методами на основе кинетического уравнения Больцмана с интегралом столкновений в форме БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук).

В статье [7] рассматривается пример практического применения колебательной системы, подобной рассматриваемой во второй задаче Стокса, в области нанотехнологий.

В диссертации [13] были предложены два решения второй задачи Стокса, учитывающие весь возможный диапазон коэффициента аккомодации тангенциального импульса. Эти решения отвечают соответственно гидродинамическому и кинетическому описанию поведения газа над колеблющейся поверхностью в режиме со скольжением.

В наших работах [16]–[18] дается аналитическое решение второй задачи Стокса с использованием БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) кинетического уравнения. В этих работах отыскиваются собственные функции и соответствующие собственные значения, отвечающие как дискретному, так и непрерывному спектрам. Исследована структура дискретного и непрерывного спектров. Развивается математический аппарат, необходимый для аналитического решения задачи и приложений. Наконец, в [18] приводится аналитическое решение.

В настоящей работе строится аналитическое решение второй задачи Стокса с использованием линеаризованного эллипсоидально статистического кинетического уравнения. На основе аналитического решения построена функция распределения газовых молекул в полупространстве и непосредственно у колеблющейся границы.

1 Постановка задачи

Пусть разреженный одноатомный газ занимает полупространство $x > 0$ над плоской твердой поверхностью, лежащей в плоскости $x = 0$. Поверхность (y, z) совершает гармонические колебания вдоль оси y по закону $u_s(t) = u_0 e^{-i\omega t}$.

Линеаризуем функцию распределения, полагая $f = f_0(1 + \varphi)$. Здесь $f_0(v) = n(\beta/\pi)^{3/2} \exp(-\beta v^2)$ – абсолютный максвеллиан, $\beta = m/(2kT)$. Рассмотрим линеаризованное эллипсоидально–статистическое кинетическое уравнение (кратко: ЭС–уравнение)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \nu \varphi(x, t, \mathbf{v}) = \\ = 2\nu \beta v_y u_y(x, t) + 2a \frac{\nu \beta^2}{\rho} v_x v_y \sigma_{xy}(x, t). \end{aligned} \quad (1.1)$$

В (1.1) $\nu = 1/\tau$ – частота столкновений газовых молекул, τ – время между двумя последовательными столкновениями молекул, m – масса молекулы, k – постоянная Больцмана, T – температура газа, $u_y(x, t)$ – массовая скорость газа, $\sigma_{xy}(x, t)$ – компонента тензора вязких напряжений, a – числовой параметр уравнения, причем при $a = -1$ число Прандтля является истинным ($\text{Pr} = 2/3$),

$$\begin{aligned} u_y(x, t) &= \frac{1}{n} \int v_y f(x, t, \mathbf{v}) d^3 v, \\ \sigma_{xy}(x, t) &= m \int v_x v_y f(x, t, \mathbf{v}) d^3 v, \end{aligned}$$

n – числовая плотность (концентрация) газа. Концентрация газа и его температура считаются постоянными в линеаризованной постановке задачи.

Введем безразмерные скорости и параметры: безразмерную скорость молекул: $\mathbf{C} = \sqrt{\beta} \mathbf{v}$ ($\beta = m/(2kT)$), безразмерную массовую скорость $U_y(x, t) = \sqrt{\beta} u_y(x, t)$, безразмерное время $t_1 = \nu t$ и безразмерную скорость колебаний пластины $U_s(t) = U_0 e^{-i\omega t}$, безразмерную компоненту тензора вязких напряжений $P_{xy}(x, t) = (\beta/\rho) \sigma_{xy}(x, t)$,

где $U_0 = \sqrt{\beta}u_0$ – безразмерная амплитуда скорости колебаний границы полупространства. Тогда уравнение (1.1) может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} + C_x \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \varphi(x_1, t_1, \mathbf{C}) = \\ = 2C_y U_y(x_1, t_1) + 2aC_x C_y P_{xy}(x_1, t_1). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Заметим, что для безразмерного времени $U_s(t_1) = U_0 e^{-i\omega_1 t_1}$.

В задаче о колебаниях газа требуется найти функцию распределения $f(x_1, t_1, \mathbf{C})$ газовых молекул.

Затем на основании найденной функции распределения требуется найти массовую скорость газа, значение массовой скорости газа непосредственно у стенки. Кроме того, требуется вычислить силу сопротивления газа, действующую на колеблющуюся пластину, ограничивающую газ. Подчеркнем, что задача о колебаниях газа решается в линеаризованной постановке. Линеаризация задачи проведена по безразмерной массовой скорости $U_y(x_1, t_1)$ при условии, что $|U_y(x, t_1)| \ll 1$. Это неравенство эквивалентно неравенству

$$|u_y(x_1, t_1)| \ll v_T,$$

где $v_T = 1/\sqrt{\beta}$ – тепловая скорость молекул, имеющая порядок скорости звука.

Величины безразмерных массовой скорости и компоненты тензора вязких напряжений через функцию φ выражаются следующим образом:

$$U_y(x_1, t_1) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \exp(-C^2) C_y \varphi(x_1, t_1, \mathbf{C}) d^3 C, \quad (1.3)$$

и

$$P_{xy}(x_1, t_1) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \exp(-C^2) C_x C_y \varphi(x_1, t_1, \mathbf{C}) d^3 C. \quad (1.4)$$

С помощью (1.3) и (1.4) кинетическое линеаризованное уравнение (1.2) записывается в виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_1} + C_x \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \varphi(x_1, t_1, \mathbf{C}) = \frac{2C_y}{\pi^{3/2}} \int \exp(-C'^2) C'_y \varphi(x_1, t_1, \mathbf{C}') d^3 C' +$$

$$+\frac{2aC_xC_y}{\pi^{3/2}} \int \exp(-C'^2)C'_xC'_y\varphi(x_1, t_1, \mathbf{C}') d^3C' \quad (1.5)$$

Сформулируем диффузные граничные условия, записанные относительно функции $\varphi(x_1, t_1, \mathbf{C})$:

$$\varphi(0, t_1, \mathbf{C}) = 2C_yU_s(t_1)e^{-i\omega_1t_1}, \quad C_x > 0, \quad (1.6)$$

$$\varphi(x_1 \rightarrow +\infty, t_1, \mathbf{C}) = 0. \quad (1.7)$$

Итак, граничная задача о колебаниях газа сформулирована полностью и состоит в решении уравнения (1.5) с граничными условиями (1.6) и (1.7).

Учитывая, что колебания пластины рассматриваются вдоль оси y , будем искать функцию φ в виде

$$\varphi(x_1, t_1, \mathbf{C}) = C_y e^{-i\omega_1t_1} h(x_1, C_x). \quad (1.8)$$

С помощью (1.8) получаем следующую граничную задачу:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x_1} + z_0 h(x_1, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2)(1 + a\mu\mu')h(x_1, \mu')d\mu', \quad (1.9)$$

$$h(0, \mu) = 2U_0, \quad \mu > 0, \quad z_0 = 1 - i\omega_1, \quad (1.10)$$

$$h(+\infty, \mu) = 0. \quad (1.11)$$

2 Собственные решения непрерывного спектра

Разделение переменных в уравнении (1.9) осуществляется следующей подстановкой

$$h_\eta(x_1, \mu) = \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu), \quad (2.1)$$

где η – параметр разделения, или спектральный параметр, вообще говоря, комплексный.

Подставляя (2.1) в уравнение (1.9) получаем характеристическое уравнение

$$z_0(\eta - \mu)\Phi(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta n_0(\eta) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}a\mu\eta n_1(\eta), \quad (2.2)$$

где

$$n_k(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2) \mu'^k \Phi(\eta, \mu') d\mu', \quad k = 0, 1.$$

Из уравнения (2.2) находим, что

$$n_1(\eta) = -\frac{i\omega_1}{z_0}\eta n_0(\eta).$$

Следовательно, уравнение (2.2) можно представить в виде:

$$(\eta - \mu)\Phi(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}z_0}\eta n_0(\eta)(1 - b\mu\eta), \quad (2.3)$$

где

$$b = \frac{i\omega_1 a}{z_0}.$$

Далее примем следующую нормировку

$$n_0(\eta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2) \Phi(\eta, \mu') d\mu' \equiv z_0.$$

Тогда уравнение (2.3) имеет при $\eta, \mu \in (-\infty, +\infty)$ решение [20]

$$\Phi(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} P \frac{\eta(1 - b\mu\eta)}{\eta - \mu} + e^{\eta^2} \lambda(\eta) \delta(\eta - \mu), \quad (2.4)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, символ Px^{-1} означает главное значение интеграла при интегрировании x^{-1} , $\lambda(z)$ – дисперсионная функция, введенная равенством

$$\lambda(z) = 1 - i\omega_1 + \frac{z}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau^2}(1 - bz\tau) d\tau}{\tau - z}.$$

Эту функцию можно преобразовать к виду:

$$\lambda(z) = -i\omega_1 + (1 - bz^2)\lambda_0(z),$$

где $\lambda_0(z)$ – известная функция из теории плазмы,

$$\lambda_0(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau^2} \tau d\tau}{\tau - z}.$$

Собственные функции (2.4) называются собственными функциями непрерывного спектра, ибо спектральный параметр η непрерывным образом заполняет всю действительную прямую.

Таким образом, собственные решения уравнения (1.9) имеют вид (2.1), в котором функция $\Phi(\eta, \mu)$ определяется равенством (2.4).

По условию задачи мы ищем решение, невозрастающее вдаль от стенки. В связи с этим спектром граничной задачи будем называть положительную действительную полуось параметра η .

Приведем формулы Сохоцкого сверху и снизу на действительной оси для дисперсионной функции:

$$\lambda^{\pm}(\mu) = \pm i\sqrt{\pi}\mu e^{-\mu^2}(1 - b\mu^2) - i\omega_1 + \frac{1 - b\mu^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau^2} \tau d\tau}{\tau - \mu}.$$

Разность граничных значений сверху и снизу на действительной оси дисперсионной функции отсюда равна:

$$\lambda^+(\mu) - \lambda^-(\mu) = 2\sqrt{\pi}\mu e^{-\mu^2}(1 - b\mu^2)i,$$

полусумма граничных значений равна:

$$\frac{\lambda^+(\mu) + \lambda^-(\mu)}{2} = -i\omega_1 + \frac{1 - b\mu^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau^2} \tau d\tau}{\tau - \mu}.$$

Сингулярный интеграл в этих равенствах понимается в смысле главного значения.

3 Структура дискретного спектра

Покажем, что дискретный спектр, состоящий из нулей дисперсионного уравнения $\lambda(z) = 0$, содержит два нуля $-\eta_0$ и η_0 , из которых обозначается через η_0 тот нуль, у которого $\text{Re } \eta_0 > 0$.

Сначала рассмотрим случай малых значений ω_1 . Разложим дисперсионную функцию в асимптотический ряд по отрицательным степеням переменного z в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\lambda(z) = -i\omega_1 + \frac{b}{2} - \frac{1}{2z^2} + \frac{3b}{4z^2} + \dots, \quad z \rightarrow \infty. \quad (3.1)$$

Из разложения (3.1) видно, что при малых значениях ω_1 дисперсионная функция имеет два отличающиеся лишь знаками комплексно-значных нуля:

$$\pm \eta_0^{(0)}(\omega_1) = \sqrt{i \frac{1 - 3i\omega_1 a/2z_0}{\omega_1(2 - a/z_0)}} = \sqrt{i \frac{1 - i\omega_1 - 3i\omega_1 a/2}{2\omega_1(1 - i\omega_1 - a/2)}}, \quad -1 \leq a \leq 0.$$

Отсюда видно, что при $\omega_1 \rightarrow 0$ оба нуля дисперсионной функции имеют пределом одну бесконечно удаленную точку $\eta_i = \infty$ кратности (порядка) два.

Теперь исследуем случай произвольных значений ω_1 . Далее нам понадобится функция

$$G(\tau) = \frac{\lambda^+(\tau)}{\lambda^-(\tau)} = \frac{-i\omega_1 + (1 - b\tau^2)\lambda_0^+(\tau)}{-i\omega_1 + (1 - b\tau^2)\lambda_0^-(\tau)}. \quad (3.2)$$

Выделим у функции $G(\tau)$ действительную и мнимую части. Заметим, что

$$b = b_1 + ib_2, \quad b_1 = -\frac{a\omega_1^2}{1 + \omega_1^2}, \quad b_2 = \frac{a\omega_1}{1 + \omega_1^2},$$

$$\lambda_0^\pm(\tau) = l(\tau) \pm is(\tau), \quad s(\tau) = \sqrt{\pi}\tau e^{-\tau^2},$$

$$l(\tau) = 1 - 2\tau^2 \int_0^1 e^{-\tau^2(1-x^2)} dx.$$

Теперь равенство (3.2) записывается следующим образом:

$$G(\tau) = \frac{-i\omega_1 + [(1 - b_1\tau^2) - ib_2\tau^2](l(\tau) + is(\tau))}{-i\omega_1 + [(1 - b_1\tau^2) - ib_2\tau^2](l(\tau) - is(\tau))},$$

или

$$G(\tau) = \frac{p + q - i(\omega_1 - p_1 + q_1)}{p - q - i(\omega_1 + p_1 + q_1)},$$

где

$$\begin{aligned} p(\tau) &= (1 - b_1\tau^2)l(\tau), & q(\tau) &= b_2\tau^2s(\tau), \\ p_1(\tau) &= (1 - b_1\tau^2)s(\tau), & q_1(\tau) &= b_2\tau^2l(\tau). \end{aligned}$$

Теперь функцию $G(\tau)$ можно представить в виде

$$G(\tau) = G_1(\tau) + iG_2(\tau),$$

где

$$\begin{aligned} G_1(\tau) &= \frac{g_1(\tau)}{g_0(\tau)}, & G_2(\tau) &= \frac{g_2(\tau)}{g_0(\tau)}, \\ g_1(\tau) &= p^2 - q^2 + \omega_1^2 - p_1^2 + q_1^2, \\ g_2(\tau) &= 2[pp_1 + q(\omega_1 + q_1)], \\ g_0(\tau) &= (p - q)^2 + (\omega_1 + p_1 + q_1)^2. \end{aligned}$$

Функции $g_j(\tau)$ ($j = 0, 1, 2$) понадобятся в явном виде:

$$\begin{aligned} g_1(\tau) &= \omega_1^2 - [s^2(\tau) - l^2(\tau)][(1 - b_1\tau^2)^2 + b_2^2\tau^4], \\ g_2(\tau) &= 2s(\tau)\{\omega_1b_2\tau^2 + l(\tau)[(1 - b_1\tau^2)^2 + b_2^2\tau^4]\}, \\ g_0(\tau) &= \omega_1^2 + 2\omega_1[(1 - b_1\tau^2)s(\tau) + b_2\tau^2l(\tau)] + [l^2(\tau) + s^2(\tau)][(1 - b_1\tau^2)^2 + b_2^2\tau^4]. \end{aligned}$$

В этих равенствах

$$(1 - b_1\tau^2)^2 + b_2^2\tau^4 = \frac{1 + \omega_1^2(1 + a\tau^2)^2}{1 + \omega_1^2}.$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$g_1(\tau) = \frac{\omega_1^4 - \omega_1^2s_1(\tau) - s_0(\tau)}{1 + \omega_1^2},$$

где

$$s_0(\tau) = s^2(\tau) - l^2(\tau), \quad s_1(\tau) = s_0(\tau)(1 + a\tau^2)^2 - 1,$$

и

$$\begin{aligned} g_2(\tau) &= \frac{2s(\tau)}{1 + \omega_1^2} \left\{ a\omega_1^2\tau^2 + l(\tau)[1 + \omega_1^2(1 + a\tau^2)^2] \right\}, \\ g_0(\tau) &= \omega_1^2 + [l^2(\tau) + s^2(\tau)] \frac{1 + \omega_1^2(1 + a\tau^2)^2}{1 + \omega_1^2} + \end{aligned}$$

$$+2\omega_1 \left[\left(1 + \frac{a\omega_1\tau^2}{1+\omega_1^2} \right) s(\tau) + \frac{a\omega_1\tau^2}{1+\omega_1^2} l(\tau) \right].$$

Можно показать с помощью принципа аргумента аналогично тому, как это сделано в [16], что число нулей дисперсионной функции равно:

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d \ln G(\tau) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} d \ln G(\tau) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\arg G(\tau) \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\pi} \arg G(+\infty) = 2\kappa(G), \end{aligned}$$

т.е. удвоенному индексу функции $G(\tau)$.

Введем угол $\theta(\tau) = \arg G(\tau)$ – главное значение аргумента, фиксированное в нуле условием $\theta(0) = 0$,

$$\theta(\tau) = \operatorname{arccctg} \frac{\operatorname{Re} G(\tau)}{\operatorname{Im} G(\tau)} = \operatorname{arccctg} \frac{g_1(\tau)}{g_2(\tau)}. \quad (3.3)$$

Из уравнения $g_1(\tau) = 0$ найдем его положительный корень:

$$\omega_1(a) = \sqrt{\frac{s_1(\tau)}{2} + \sqrt{\left(\frac{s_1(\tau)}{2}\right)^2 + s_0(\tau)}} \equiv \Omega(\tau, a).$$

Введем выделенную частоту колебаний пластины, ограничивающей газ:

$$\omega_1^*(a) = \max_{0 < \tau < \infty} \Omega(\tau, a). \quad (3.4)$$

Эту частоту колебаний будем называть *критической*.

Аналогично [16] можно показать, что в случае, когда частота колебаний пластины меньше критической, т.е. при $0 \leq \omega < \omega_1^*(a)$, индекс функции $G(t)$ равен единице. Это означает, что число комплексных нулей дисперсионной функции в плоскости с разрезом вдоль действительной оси, равно двум.

В случае, когда частота колебаний пластины превышает критическую ($\omega > \omega_1^*(a)$) индекс функции $G(t)$ равен нулю: $\kappa(G) = 0$. Это означает, что дисперсионная функция не имеет нулей в верхней и нижней полуплоскостях. В этом случае дискретных (частных) решений исходное уравнение (1.9) не имеет.

Таким образом, дискретный спектр характеристического уравнения, состоящий из нулей дисперсионной функции, в случае $0 \leq \omega_1 < \omega_1^*(a)$ есть множество из двух точек η_0 и $-\eta_0$. При $\omega_1 > \omega_1^*(a)$ дискретный спектр — это пустое множество. При $0 \leq \omega_1 < \omega_1^*(a)$ убывающее собственное решение уравнения (1.9) имеет вид $h_{\eta_0}(x_1, \mu) = e^{-x_1 z_0 / \eta_0} \Phi(\eta_0, \mu)$, где

$$\Phi(\eta_0, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\eta_0(1 - b\mu\eta_0)}{\eta_0 - \mu}$$

— собственная функция характеристического уравнения. Это означает, что дискретный спектр рассматриваемой граничной задачи состоит из одной точки η_0 в случае $0 < \omega_1 < \omega_1^*(a)$. При $\omega_1 \rightarrow 0$ оба нуля $\pm\eta_0$, как уже указывалось выше, перемещаются в одну и ту же бесконечно удаленную точку. Это значит, что в случае $\omega_1 = 0$ дискретный спектр задачи состоит из одной бесконечно удаленной точки кратности два и является присоединенным к непрерывному спектру. В этом случае дискретных (частных) решения ровно два:

$$h_1(x_1, \mu) = 1, \quad h_2(x_1, \mu) = x_1 - \frac{2}{2-a}\mu.$$

Нетрудно показать, что параметр уравнения a и число Прандтля связаны соотношением:

$$\text{Pr} = \frac{2}{2-a}, \quad \text{откуда} \quad a = -\frac{2(1-\text{Pr})}{\text{Pr}}.$$

Правильному (истинному) числу Прантля $\text{Pr} = 2/3$ отвечает значение параметра $a = -1$.

Приведем таблицу критических частот в зависимости от значений числа Прандтля и параметра уравнения a согласно (3.4).

Таблица значений критических частот.

Число Прандтля Pr	Параметр a	Критическая частота ω_1^*
1	0	0.733
0.952	-0.1	0.717
0.909	-0.2	0.717
0.870	-0.3	0.691
0,833	-0.4	0.681
0.800	-0.5	0.672
0.769	-0.6	0.662
0.741	-0.7	0.654
0.714	-0.8	0.648
0.690	-0.9	0.642
2/3	-1	0.637

4 Аналитическое решение граничной задачи

Составим общее решение уравнения (1.9) в виде суммы частного (дискретного) решения, убывающего вдали от стенки, и интеграла по непрерывному спектру от собственных решений, отвечающих непрерывному спектру:

$$h(x_1, \mu) = a_0 \Phi(\eta_0, \mu) e^{-x_1 z_0 / \eta_0} + e^{-x_1 z_0 / \eta} \Phi(\eta, \mu) a(\eta) d\eta. \quad (4.1)$$

Здесь a_0 – неизвестный постоянный коэффициент, называемый коэффициентом дискретного спектра, причем при $\varkappa = 0$ этот коэффициент равен нулю: $a_0 = 0$, $a(\eta)$ – неизвестная функция, называемая коэффициентом непрерывного спектра, $\Phi(\eta, \mu)$ – собственная функция характеристического уравнения, отвечающая непрерывному спектру и единичной нормировке. Постоянная a_0 и функция $a(\eta)$ подлежат нахождению из граничного условия (1.10).

Разложение (4.1) можно представить в явном виде:

$$h(x_1, \mu) = a_0 \frac{\eta_0(1 - b\mu\eta_0)}{\sqrt{\pi}(\eta_0 - \mu)} \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta_0}\right) + \\ + \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\mu} + \mu^2\right) \lambda(\mu) a(\mu) \theta_+(\mu) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta}\right) \frac{\eta(1-b\mu\eta)a(\eta)d\eta}{\eta-\mu}, \quad (4.2)$$

где $\theta_+(\mu)$ – функция Хэвисайда,

$$\theta_+(\mu) = \begin{cases} 1, & \mu > 0, \\ 0, & \mu < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что разложение (4.2) автоматически удовлетворяет граничному условию (1.11) вдали от стенки. Подставим разложение (4.2) в граничное условие (1.10). Получаем одностороннее сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши

$$\begin{aligned} & \frac{\eta_0(1-b\mu\eta_0)a_0}{\sqrt{\pi}(\eta_0-\mu)} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\eta a(\eta)(1-b\mu\eta)d\eta}{\eta-\mu} + \\ & + \exp(\mu^2)\lambda(\mu)a(\mu) = 2U_0, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Сингулярный интеграл из (4.3) представим в виде суммы двух слагаемых и перепишем уравнение в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\eta_0(1-b\mu\eta_0)a_0}{\sqrt{\pi}(\eta_0-\mu)} + A + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\eta(1-b\eta^2)a(\eta)d\eta}{\eta-\mu} + \\ & + \exp(\mu^2)\lambda(\mu)a(\mu)\theta_+(\mu) = 2U_0, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь

$$A = b \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \eta^2 a(\eta) d\eta. \quad (4.5)$$

Введем вспомогательную функцию

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\eta(1-b\eta^2)a(\eta)d\eta}{\eta-z}, \quad (4.6)$$

для которой согласно формулам Сохоцкого

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = 2\sqrt{\pi}i\mu(1-b\mu^2)a(\mu), \quad \mu > 0. \quad (4.7)$$

Пользуясь формулами Сохоцкого для вспомогательной и дисперсионной функций, от уравнения (4.4) приходим к краевому условию:

$$\begin{aligned} & \lambda^+(\mu) \left[N^+(\mu) - 2U_0 + A + \frac{\eta_0(1 - b\mu\eta_0)a_0}{\sqrt{\pi}(\eta_0 - \mu)} \right] - \\ & - \lambda^-(\mu) \left[N^-(\mu) - 2U_0 + A + \frac{\eta_0(1 - b\mu\eta_0)a_0}{\sqrt{\pi}(\eta_0 - \mu)} \right] = 0, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Рассмотрим соответствующую однородную краевую задачу Римана:

$$X^+(\mu) = G(\mu)X^-(\mu), \quad \mu > 0, \quad (4.9)$$

где коэффициент задачи $G(\tau)$ определен равенством (3.2).

Решение задачи Римана (4.9) проводится аналогично [17] и дается интегралом типа Коши:

$$X(z) = \frac{1}{z^\varkappa} \exp V(z), \quad (4.10)$$

где $\varkappa = \varkappa(G)$ – индекс коэффициента задачи, введенный в п. 3, а $V(z)$ понимается как интеграл типа Коши

$$V(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\ln G(\tau) - 2\pi i \varkappa}{\tau - z} d\tau. \quad (4.11)$$

Здесь $\ln G(\tau) = \ln |G(\tau)| + i\theta(\tau)$ – главная ветвь логарифма, фиксированная в нуле условием $\ln G(0) = 0$, угол $\theta(\tau) = \arg G(\tau)$ – главное значение аргумента, введенное равенством (3.3). Интеграл (4.11) удобнее рассматривать в виде:

$$V(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{q(\tau) - \pi \varkappa}{\tau - z},$$

где

$$q(\tau) = \frac{\theta(\tau)}{2} - \frac{i}{2} \ln |G(\tau)|,$$

или в виде

$$V(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\zeta(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad \varkappa = 0, 1,$$

где

$$\zeta(\tau) = q(\tau) - \pi\kappa.$$

Вернемся к решению неоднородной задачи (4.8), предварительно преобразовав с помощью (4.9) ее к виду:

$$X^+(\mu) \left[N^+(\mu) - 2U_0 + A + \frac{\eta_0(1 - b\mu\eta_0)a_0}{\sqrt{\pi}(\eta_0 - \mu)} \right] - \\ - X^-(\mu) \left[N^-(\mu) - 2U_0 + A + \frac{\eta_0(1 - b\mu\eta_0)a_0}{\sqrt{\pi}(\eta_0 - \mu)} \right] = 0, \quad \mu > 0. \quad (4.12)$$

Учитывая поведение всех входящих в краевое условие (4.12) функций в комплексной плоскости и в бесконечно удаленной точке получаем общее решение, из которого находим

$$N(z) = 2U_0 - A + \frac{\eta_0(1 - bz\eta_0)a_0}{\sqrt{\pi}(z - \eta_0)} + \frac{1}{X(z)} \left[C_0 + \frac{C_1}{z - \eta_0} \right], \quad (4.13)$$

где C_0, C_1 – произвольные постоянные, причем при $\kappa = 0$ $C_1 = 0$, а при $\kappa = 1$ $C_0 = 0$, функция $X(z)$ определяется равенством (4.10).

Потребуем, чтобы общее решение (4.13) имело те же аналитические свойства, что и вспомогательная функция (4.6). Рассмотрим случай $\kappa = 0$. В этом случае $C_0 = -2U_0 + A$.

Подставляя (4.13) в (4.7), находим коэффициент непрерывного спектра:

$$a(\eta) = -\frac{2U_0 - A}{2i\sqrt{\pi}\eta(1 - b\eta^2)} \left[\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)} \right].$$

Замечая, что

$$\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)} = -\frac{2i \sin \zeta(\eta)}{X(\eta)},$$

с помощью (4.10) получаем следующее выражение для коэффициента непрерывного спектра:

$$a(\eta) = \frac{(2U_0 - A) \sin \zeta(\eta)}{\sqrt{\pi}\eta(1 - b\eta^2)X(\eta)}.$$

Осталось найти выражение для A , входящее в последнее соотношение. Подставляя это соотношение в (4.5), сначала находим величину A из полученного уравнения, а затем окончательно находим

выражение коэффициента непрерывного спектра:

$$a(\eta) = \frac{2U_0 \sin \zeta(\eta)}{\sqrt{\pi}(1 + bJ_0)\eta(1 - b\eta^2)X(\eta)}, \quad (4.14)$$

где

$$J_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau \sin \zeta(\tau) d\tau}{(1 - b\tau^2)X(\tau)}.$$

В случае $\varkappa = 1$ сначала устраним полюс в точке η_0 условием

$$C_1 = -a_0 \frac{\eta_0(1 - b\eta_0^2)X(\eta_0)}{\sqrt{\pi}},$$

затем, из условия $N(\infty) = 0$ находим:

$$C_1 = -(2U_0 - A) + \frac{a_0 b \eta_0^2}{\sqrt{\pi}}.$$

Далее, опуская длительные, но прямолинейные вычисления, на основании (4.7), (4.13) и (4.5) находим сначала коэффициент дискретного спектра:

$$a_0 = \frac{2U_0 \sqrt{\pi}}{b\eta_0^2 + \eta_0(1 - b\eta_0^2)X(\eta_0)(1 - bJ_1)}, \quad (4.15)$$

где

$$J_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau \sin \zeta(\tau) d\tau}{(1 - b\tau^2)(\tau - \eta_0)X(\tau)},$$

а затем и коэффициент непрерывного спектра

$$a(\eta) = -\frac{C_1 \sin \zeta(\eta)}{\sqrt{\pi}\eta(1 - b\eta^2)(\eta - \eta_0)X(\eta)}, \quad (4.16)$$

где

$$C_1 = -\frac{2U_0 \eta_0(1 - b\eta_0^2)X(\eta_0)}{b\eta_0^2 + \eta_0(1 - b\eta_0^2)X(\eta_0)(1 - bJ_1)}.$$

На этом этапе доказательство разложения (4.1) (или (4.2)) закончено.

5 Функция распределения

Рассмотрим функцию $h(x_1, \mu)$ для летящих к стенке молекул непосредственно у стенки, т.е. при $x_1 = 0, \mu < 0$. Согласно (4.1) имеем:

$$h(0, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\eta(1 - b\mu\eta)}{\eta - \mu} a(\eta) d\eta, \quad \text{если } \varkappa = 0, \quad (5.1)$$

и

$$h(0, \mu) = a_0 \frac{\eta_0(1 - b\mu\eta_0)}{\sqrt{\pi}(\eta_0 - \mu)} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\eta(1 - b\mu\eta)}{\eta - \mu} a(\eta) d\eta, \quad \text{если } \varkappa = 1. \quad (5.2)$$

С помощью формулы (4.14) представим разложение (5.1) в явном виде:

$$\frac{h(0, \mu)}{2U_0} = \frac{1}{(1 + bJ_0)\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1 - b\mu\eta) \sin \zeta(\eta) d\eta}{(1 - b\eta^2)X(\eta)(\eta - \mu)}, \quad (5.3)$$

а с помощью формул (4.15) и (4.16) в явном виде представим разложение (5.2):

$$\begin{aligned} \frac{h(0, \mu)}{2U_0} &= \frac{\eta_0(1 - b\mu\eta_0)}{[b\eta_0^2 + \eta_0(1 - b\eta_0^2)X(\eta_0)(1 - bJ_1)](\eta_0 - \mu)} + \\ &+ \frac{\eta_0(1 - b\eta_0^2)X(\eta_0)}{[b\eta_0^2 + \eta_0(1 - b\eta_0^2)X(\eta_0)(1 - bJ_1)]} \times \\ &\times \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1 - b\mu\eta) \sin \zeta(\eta) d\eta}{(1 - b\eta^2)X(\eta)(\eta - \eta_0)(\eta - \mu)}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Рассмотрим важный частный случай формул (5.3) и (5.4) при $b \rightarrow 0$, т.е. когда рассматриваемое эллипсоидально-статистическое уравнение переходит в БГК-уравнение. При $b = 0$ из (5.3) и (5.4) соответственно имеем:

$$\frac{h(0, \mu)}{2U_0} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \zeta(\eta) d\eta}{X(\eta)(\eta - \mu)}, \quad (5.5)$$

и

$$\frac{h(0, \mu)}{2U_0} = \frac{1}{X(\eta_0)(\eta_0 - \mu)} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \zeta(\eta) d\eta}{X(\eta)(\eta - \eta_0)(\eta - \mu)} \quad (5.6)$$

Формулы (5.5) и (5.6) в точности совпадают с соответствующими формулами из нашей работы [18].

6 Скорость газа в полупространстве и непосредственно у стенки

Согласно (1.3) безразмерная скорость газа в полупространстве вычисляется после подстановки (1.8) в (1.3) по формуле:

$$U_y(x_1, t_1) = \frac{e^{-i\omega_1 t_1}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} h(x_1, \mu) d\mu. \quad (6.1)$$

Заметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} \Phi(\eta_0, \mu) d\mu = \frac{\eta_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\mu^2} d\mu}{\eta_0 - \mu} = 1 - i\omega_1 = z_0,$$

ибо η_0 – нуль дисперсионной функции, т.е.

$$\lambda(\eta_0) = -i\omega_1 + 1 + \frac{\eta_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\mu^2} d\mu}{\mu - \eta_0} = 0.$$

Подставим разложение (4.1) в (6.1). Учитывая принятую выше нормировку

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} \Phi(\eta, \mu) d\mu = z_0,$$

получаем следующее выражение для безразмерной скорости газа:

$$U_y(x_1, t_1) = \frac{z_0 e^{-i\omega_1 t_1}}{2\sqrt{\pi}} \left[a_0 e^{-x_1 z_0 / \eta_0} + \int_0^{\infty} e^{-x_1 z_0 / \eta} a(\eta) d\eta \right]. \quad (6.2)$$

Пусть $\varkappa = 0$. Подставим в (6.2) выражение (4.14) для коэффициента непрерывного спектра. Тогда выражение для размерной скорости газа имеет вид:

$$\frac{u_y(x_1, t_1)}{u_0} = \frac{z_0 e^{-i\omega_1 t_1}}{(1 + bJ_0)\pi} \int_0^\infty e^{-x_1 z_0/\eta} \frac{\sin \zeta(\eta) d\eta}{\eta(1 - b\eta^2)X(\eta)}. \quad (6.3)$$

Формула (6.3) служит для вычисления скорости газа в диапазоне частот $\omega_1 > \omega_1^*$.

Пусть $\varkappa = 1$. Подставим в (6.2) коэффициенты непрерывного спектра (4.16) и дискретного спектра (4.15). В результате для размерной скорости газа получаем:

$$\begin{aligned} \frac{u_y(x_1, t_1)}{u_0} = & \frac{z_0 e^{-i\omega_1 t_1}}{b\eta_0^2 + y_0} \left[e^{-\frac{x_1 z_0}{\eta}} + \eta_0(1 - b\eta_0)X(\eta_0) \times \right. \\ & \left. \times \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x_1 z_0}{\eta}} \sin \zeta(\eta) d\eta}{\eta(1 - b\eta^2)X(\eta_0)(\eta - \eta_0)} \right]. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Здесь

$$y_0 = y_0(\eta_0) = \eta_0(1 - b\eta_0^2)X(\eta_0)(1 - bJ_1).$$

Формула (6.4) служит для вычисления скорости газа в диапазоне частот $0 \leq \omega_1 < \omega_1^*$.

Непосредственно у стенки из формул (6.3) и (6.4) при $x_1 = 0$ получаем значения скорости газа. В случае $\varkappa = 0$ и $\varkappa = 1$ соответственно имеем:

$$\frac{u_y(0, t_1)}{u_0} = \frac{z_0 e^{-i\omega_1 t_1}}{(1 + bJ_0)\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \zeta(\eta) d\eta}{\eta(1 - b\eta^2)X(\eta)}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{u_y(0, t_1)}{u_0} = & \frac{z_0 e^{-i\omega_1 t_1}}{b\eta_0^2 + y_0} \left[1 + \eta_0(1 - b\eta_0^2)X(\eta_0) \times \right. \\ & \left. \times \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \zeta(\eta) d\eta}{\eta(1 - b\eta^2)X(\eta_0)(\eta - \eta_0)} \right]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

7 Гидродинамический характер решения

Покажем, что при малых значениях ω_1 скорость газа (6.5) переходит в гидродинамическое выражение для скорости сплошной среды, приведенное в [23]

$$v = u_0 e^{-x/\delta} e^{i(x/\delta - \omega t)}. \quad (7.1)$$

Здесь $\delta = \sqrt{3\nu_{k.v.}/\omega}$, $\nu_{k.v.}$ – кинематическая вязкость газа.

Формула (7.1) выведена для случая сплошной среды, когда ограничивающая среду плоскость совершает гармонические колебания по закону $u_s(t) = u_0 e^{-i\omega t}$.

Заметим, что при $\omega_1 \rightarrow 0$ нуль дисперсионной функции $\eta_0^{(0)} = (1+i)/\sqrt{6\omega_1} \rightarrow \infty$, а величина $b\eta_0^2$ является ограниченной. Следовательно, интеграл по непрерывному спектру в (6.5) исчезает и мы получаем:

$$u_y(x_1, t) = \frac{u_0 e^{-i(\omega t - x_1/\eta_0)}}{b\eta_0^2 + \eta_0(1 - b\eta_0^2)X(\eta_0)(1 - bJ_1)}.$$

Заметим теперь, что при $\eta_0^{(0)} \rightarrow \infty$ $\eta_0 X(\eta_0) \rightarrow 1$, а $J_1 \rightarrow 0$. Следовательно, из предыдущего выражения вытекает, что

$$u_y(x, t) = u_0 e^{-i(\omega t - x\sqrt{\beta}/\tau\eta_0)}.$$

Найдем величину $\sqrt{\beta}/\tau\eta_0$. Нетрудно проверить, что для эллипсоидально – статистического уравнения кинематическая вязкость равна: $\nu_{k.v.} = \tau/3\beta$. Следовательно,

$$\frac{\sqrt{\beta}}{\tau\eta_0} = \frac{\sqrt{\beta}}{\tau} \frac{\sqrt{6\omega\tau}}{1+i} = \sqrt{\frac{\beta}{\tau}} \frac{\sqrt{6}}{2} (1-i) = \frac{1-i}{\sqrt{3\nu_{k.v.}/\omega}} = \frac{1-i}{\delta}.$$

Это означает, что последняя формула для скорости газа в точности переходит в формулу (7.1) при $\omega_1 \rightarrow 0$.

8 Сила трения, действующая на колеблющуюся границу

Компонента тензора вязких напряжений, приходящаяся на еди-

ницу площади колеблющейся границы, вычисляется по формуле

$$\sigma_{xy}(t) = m \int v_x v_y f(t, 0, \mathbf{v}) d^3 v. \quad (8.1)$$

Согласно [23] сила трения (приходящаяся на единицу площади), действующая со стороны газа на пластину, равна $F_s(t) = -\sigma_{xy}(0, t)$. Поэтому согласно (8.1)

$$F_s(t_1) = -e^{-i\omega_1 t_1} \frac{p}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} \mu h(0, \mu) d\mu, \quad p = nkT. \quad (8.2)$$

Подставим в (8.2) разложение (4.1). Получаем, что

$$F_s(t_1) = -i\omega_1 e^{-i\omega_1 t_1} \frac{p}{\sqrt{\pi}} \left[a_0 \eta_0 + \int_0^{\infty} \eta a(\eta) d\eta \right]. \quad (8.3)$$

Из формулы (8.3) в случае нулевого индекса ($\varkappa = 0$) мы получаем следующее выражение силы трения:

$$F_s(t_1) = -i\omega_1 e^{-i\omega_1 t_1} \frac{2U_0 p}{(1 + bJ_0)\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \zeta(\eta) d\eta}{(1 - b\eta^2)X(\eta)}.$$

В случае единичного индекса ($\varkappa = 1$) мы получаем следующее выражение силы трения:

$$F_s(t_1) = -i\omega_1 e^{-i\omega_1 t_1} \frac{2U_0 p \eta_0}{(b\eta_0^2 + y_0)} \left[1 + (1 - b\eta_0^2)X(\eta_0) \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \zeta(\eta) d\eta}{(1 - b\eta^2)(\eta - \eta_0)X(\eta)} \right].$$

9 Заключение

В настоящей работе сформулирована и решена аналитически вторая задача Стокса — задача о поведении разреженного газа, занимающего полупространство над стенкой, совершающей гармонические

колебания. Рассматриваются диффузные граничные условия. Используется линеаризованное эллипсоидально-статистическое уравнение с параметром $a = -2(1/\text{Pr} - 1)$, зависящем от числа Прандтля Pr . На основе аналитического решения построена функция распределения и найдена массовая скорость разреженного газа в полупространстве. Выявлен гидродинамический характер решения при малых значениях частоты колебаний ограничивающей газ плоскости. Найдена сила трения, действующая со стороны газа на колеблющуюся пластину.

Список литературы

- [1] L. Ai, K. Vafai, *Numerical Heat Transfer*, Part A: Applications, **47**, 2005, 955-980.
- [2] M. Khan, A. Anjum, C. Fetecau, *J. Appl. Math. and Phys (ZAMP)*, **61**:4 (2009), 697-720.
- [3] W. P. Graebel, *Engineering Fluid Mechanics*, Taylor & Francis, New York, 2001.
- [4] C. E. Siewert, F. Sharipov, *Phys. Fluids*, **14**:12 (2002), 4123-4129.
- [5] F. Sharipov F. and D. Kalempa, *Rarefied Gas Dynamics: 25-th International Symposium*, ed. by M.S.Ivanov and A.K.Rebrov. Novosibirsk, 2007, 1140-1145.
- [6] D. M. Karabacak, V. Yakhot, and K. L. Ekinici, *Phys. Rev. Lett.*, **98** (2007), 254505.
- [7] E. Steinhell, W. Scherber, M. Seide, H. Rieger, *Rarefied gas dynamics*, ed. by J.L. Potter. N.Y.: Acad. press, 1977, 589-602.
- [8] C. Colosqui, *Phys. Rev.*, **E 81**, 026702, 2010.
- [9] C. Colosqui, H. Chen, X. Shan, I. Staroselsky, and V. Yakhot, *Phys. Fluids* 21, 013105 (2009).

- [10] V. Yakhot and C. Colosqi, *J. of Fluid Mechanics*. V. 586. Sept. 2007, pp 249–258.
- [11] В. В. Дудко, А. А. Юшканов, Ю. И. Яламов, *ЖТФ*, **75**:4 (2005), 134-135.
- [12] В. В. Дудко, А. А. Юшканов, Ю. И. Яламов, *ТВТ*, **47**:2 (2009), 262-268.
- [13] В. В. Дудко, *Скольжение разреженного газа вдоль неподвижных и колеблющихся поверхностей*, дисс., Москва, 2010.
- [14] V. Yakhot and C. Colosqi, *J. of Fluid Mechanics*. V. 586. Sept. 2007, pp 249–258.
- [15] G. G. Stokes, *Trans. Cambr. Phil.*, IX, 1851, 8-106.
- [16] V. A. Akimova, A. V. Latyshev, A. A. Yushkanov, arXiv: 1111.3429.
- [17] V. A. Akimova, A. V. Latyshev, A. A. Yushkanov, arXiv: 1111.5182.
- [18] V. A. Akimova, A. V. Latyshev, A. A. Yushkanov, arXiv: 1112.1283.
- [19] К. Черчиньяни, *Теория и приложения уравнения Больцмана*, Мир, М., 1978.
- [20] В. В. Жаринов, В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Физмалит, М., 1999.
- [21] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *Аналитические методы в кинетической теории*, Изд-во МГОУ, М., 2008.
- [22] Ф. Д. Гахов *Краевые задачи*, Наука, М., 1977.
- [23] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Теоретическая физика. Т. VI. М. Физматлит (1987), 735 с.